Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 2:

ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Dạng toán tìm điều kiện của tham số để phương trình, hệ phương trình có nghiệm thường xuất hiện trong đề thi TSĐH dưới dạng áp dụng phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số để tìm miền giá trị của hàm số, từ đó suy ra giá trị cần tìm của tham số m. Đây là loại bài toán không khó và chiếm một điểm trong đề thi, nên nhớ áp xét tính đơn điệu của hàm số.

Phương pháp

+ Điều kiện cho trước ở đây được rút ra từ tập xác định của hàm số hoặc được xác định từ điều kiện nghiệm của phương trình mà đề bài yêu cầu. Ta quy ước điều kiện cho trước này là miền D.

+ Để giải quyết dạng bài toán này ta dùng phương pháp hàm số, mục đích là biểu diễn tham số theo hàm của một ẩn trên miền D, sau đó tìm GTLN,GTNN của hàm số đó trên D.

+ Phương trình, bất phương trình dưới dạng sau thì điều kiện của tham số là:

(i). $g(m) = f(t), t \in D \Rightarrow \min_{t\in D} f(t) \le g(m) \le \max_{t\in D} f(t)$.

(ii). $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \ge \min_{t\in D} f(t)$.

(iii). $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \le \max_{t\in D} f(t)$.

(iv). $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \ge \max_{t\in D} f(t)$.

(v). $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \le \min_{t\in D} f(t)$.

Các hướng giải quyết bài toán loại này:

(i). Xét tính đơn điệu của hàm trực tiếp theo ẩn x.

(ii). Nếu xuất hiện biểu thức đối xứng $\begin{cases}\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}\\ \sqrt{(ax+b)(cx+d)}\end{cases}$, thì

đặt $t=\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}$.

(iii). Nếu xuất hiện $\sqrt{a+bx};\sqrt{c-bx}\Rightarrow(\sqrt{a+bx})^2+(\sqrt{c-bx})^2=a+c$,

thì đặt $\begin{cases}\sqrt{a+bx}=\sqrt{a+c}\sin\alpha\\ \sqrt{c-bx}=\sqrt{a+c}\cos\alpha\end{cases}$ Và sử dụng hệ thức $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$, tiếp tục đặt $t=tan\dfrac{\alpha}{2}$.

(iv). Nhân hai vế với hệ thức liên hợp nếu có.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$6+x+2\sqrt{(4-x)(2x-2)}=m+4(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2})(x\in R)$$

<u>Lời giải:</u>

+Điều kiện: $1\le x\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2}$

Xét hàm số $t(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2}$ liên tục trên đoạn $[1,4]$. Ta có

$$t'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}+\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}=>t'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x}=\sqrt{2x-2}\Leftrightarrow x=3.$$

Ta có: $t_{(1)}=\sqrt{3};t_{(3)}=3;t_{(4)}=\sqrt{6}\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{x\in[1,4]}t(x)=t(1)=\sqrt{3}\\ \max\limits_{x\in[1,4]}t(x)=t(3)=3\end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$t^2+4=m+4t\Leftrightarrow m=t^2-4t+4$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t + 4$

Ta có $f'(t) = 2t - 4$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 7 - 4\sqrt{3};\ f(2) = 0;\ f(3) = 1$

$\Rightarrow 0 \le f(t) \le 1 \Rightarrow \min_{f(t)} \le m \le \max_{f(t)} \Rightarrow 0 \le m \le 1$

Vậy giá trị cần tìm của m là $0 \le m \le 1$.

Bài 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} + \sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = m$$

Lời giải:

+Điều kiện: $-4 \le x \le 1$.

Khi đó phương trình tương đương với: $m = \sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} + \left|x + \frac{3}{2}\right|$.

Đặt $t = x + \frac{3}{2} \Rightarrow m = f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + |t|, (-\frac{5}{2} \le t \le \frac{5}{2})$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + |t|, (-\frac{5}{2} \le t \le \frac{5}{2})$, ta có $f(-t) = f(t)$ nên hàm số

f(t) chẵn, nên ta chỉ cần chỉ cần xét *f(t)* trên $\left[0; \frac{5}{2}\right]$. Khi đó $f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + t$.

+Ta có: $f'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{5}{2} - t}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2} + t}} + 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{5}{2} - t} - \sqrt{\frac{5}{2} + t} + 2\sqrt{(\frac{5}{2} - t)(\frac{5}{2} + t)} = 0 (*)$

Giải phương trình (*):

+Đặt $u = \sqrt{\frac{5}{2} - t} - \sqrt{\frac{5}{2} + t} (u < 0) \Rightarrow u^2 = 5 - 2\sqrt{(\frac{5}{2} - t)(\frac{5}{2} + t)}$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$u+5-u^2=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow (\dfrac{1-\sqrt{21}}{2})^2=5-2\sqrt{\dfrac{25}{4}-t^2} \Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Ta có: $f(0)=\sqrt{10}; f(\dfrac{5}{2})=\sqrt{5}+\dfrac{5}{2}; f(\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}})=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(x)=f(0)=\sqrt{10} \\ \max\limits_{x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(x)=f(\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}})=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}} \end{cases}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\sqrt{10}\le m\le \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Bài 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm thực

$$2\sqrt[3]{3x-2m}+3\sqrt{6x-5m}-8=0$$

<u>Lời giải:</u>

+Điều kiện: $x\ge\dfrac{5m}{6}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{3x-2m} \\ v=\sqrt{6x-5m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3=3x-2m \\ v^2=6x-5m \end{cases}$.

Từ đó suy ra:

$2u^3-v^2=m(1); 2u+3v-8=0(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Rightarrow m=2(\dfrac{8-3v}{2})^3-v^2$.

Xét hàm số $f(v)=2(\dfrac{8-3v}{2})^3-v^2$ liên tục trên đoạn $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(v)=-9(\dfrac{8-3v}{2})^2-2v\le 0, \forall v\ge 0$. Suy ra hàm số $f(v)$ nghịch biến trên đoạn $[0;+\infty)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Mặt khác $\lim_{v\to+\infty} f(v)=-\infty; f(0)=128$.

$\Rightarrow f(v)\le 128, \forall v\ge 0 \Rightarrow$ để phương trình có nghiệm thì $m\le 128$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-\infty,128]$.

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m$$

Lời giải:

Điều kiện: $0\le x\le 6$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$ lien tục trên đoạn $[0;6]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x(6-x)}}+\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}+\frac{1}{2\sqrt[4]{2x(6-x)}}+\frac{1}{2\sqrt{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\Leftrightarrow 2x=6-x\Leftrightarrow x=2.$$

Ta có $\begin{cases} f(0)=2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \\ f(2)=6+3\sqrt{2} \\ f(6)=\sqrt[4]{12}+\sqrt{12} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$, ta suy ra để phương trình có đúng 2 nghiệm thực thì : $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<6+3\sqrt{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{x^2-1}$$

Lời giải:

+Điều kiện: $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}(*)$.

Ta đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, xét hàm số $t(x)=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ trên đoạn $[1;+\infty)$.

Ta có $t'(x)=\frac{1}{2(x+1)^2}(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{-3}{4}}>0,\forall x\ge 1$

Mặt khác ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} t=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=1\\ t(1)=0\end{cases}\Rightarrow 0\le t<1$.

Phương trình (*) trở thành: $m=t-3t^2$.

Xét hàm số $f(t)=t-3t^2$ liên tục trên đoạn $[0;1)$.

Ta có $f'(t)=1-6t\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$.

Ta có: $\begin{cases}\Rightarrow f(0)=0\\ f(\frac{1}{6})=\frac{1}{12}\\ f(1)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{t\in[0;1)} f(t)=f(1)=-2\\ \max\limits_{t\in[0;1)} f(t)=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{12}\end{cases}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-2\le m\le\frac{1}{12}$.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$

$\Rightarrow(2x+1)^2(x^2-x+1)=(2x-1)^2(x^2+x+1)\Rightarrow x=0.$

Thử lại thấy $x=0$ không thỏa mãn, vậy $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định. Mặt khác lại có $f'(0)=1\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1.$

Và tương tự ta có, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Từ đó suy ra : $-1<f(x)<1$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-1<m<1$.

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2}+2(6-5x)\sqrt{6-5x}-48x=m.$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2}+2(6-5x)\sqrt{6-5x}-48x$ liên tục trên đoạn $\left(0;\dfrac{6}{5}\right]$.

Ta có $f'(x)=12\sqrt[3]{3x-2}+18\sqrt{6-5x}-48$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0(*)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải phương trình (*):

Đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3 + 3v^2 = 8(1).$$

Và từ (*) ta có $2u + 3v - 8 = 0(2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$5u^3 + 3(\frac{8-2u}{3})^2 = 8 \Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2} = -2 \Rightarrow x = -2.$$

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = 272 \\ f(\frac{6}{5}) = \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{x\in\left(0;\frac{6}{5}\right]} f(x) = f(\frac{6}{5}) = \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5}.$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m \ge \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5}$.

Bài 8. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm thực: $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$

Lời giải:

+ Điều kiện: $-3 \le x \le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$m(4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1) = 1 + 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 + 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x+3}}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1} (*).$$

Ta có $(\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{x+3})^2 = 4$, nên ta đặt $\begin{cases} \sqrt{1-x} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{x+3} = 2\cos\alpha \end{cases}, (0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Sử dụng $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}; \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$ và đặt $t = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}(0 \le t \le 1)$.

Khi đó (*) trở thành: $m = \dfrac{1+t^2+16t+6(1-t^2)}{8(1-t^2)+12t+1+t^2} = \dfrac{-5t^2+16t+7}{-7t^2+12t+9}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-5t^2+16t+7}{-7t^2+12t+9}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{52t^2+8t+60}{(-7t^2+12t+9)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [0;1]$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = f(0) = \dfrac{7}{9} \\ \max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = f(1) = \dfrac{9}{7} \end{cases}$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{7}{9} \le m \le \dfrac{9}{7}$.

Bài 9. Tìm những giá trị thực dương của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm thực không vượt quá 6.

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = m - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Lời giải:

Điều kiện $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right) = m(*)$

Với những giá trị thực dương của tham số m nên để phương trình (*) có nghiệm thì $\sqrt{2x-1}-3 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Vậy ta xét hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ trên khoảng $(5;6]$

Ta có $f'(x) > 0, \forall x \in (5;6)$. Và $f(5) = 0; f(6) = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-3\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $0 < m \le 6\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-3\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau đây có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})^3+(y+\dfrac{1}{y})^3-3(x+\dfrac{1}{x})-3(y+\dfrac{1}{y})=15m-10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})^3+(y+\dfrac{1}{y})^3=15m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y})^3-3(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y})=15m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})=8-m \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases} (|u|;|v|\ge 2)$

$\Rightarrow u,v$ là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+(8-m)=0$ (1)

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $|t|\ge 2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) ta có: $m = f(t) = t^2 - 5t + 8(|t| \ge 2) \Rightarrow f'(t) = 2t - 5 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$.

Ta có: $f(-2) = 22; f(2) = 2; f(\frac{5}{2}) = \frac{7}{4}; \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

+Để (1) có 2 nghiệm phân biệt ($|t| \ge 2$)thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 2 điểm phân biệt. Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$,dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \frac{7}{4} < m \le 2 \bigcup 22 \le m < +\infty$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0(1) \\ 3\sqrt{y-1} - m\sqrt{10-2x} = 2\sqrt[4]{y^2-1}(2) \end{cases} (*)$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \le 2; y \ge 1$.

Khi đó phương trình (1) tương đương với: $(1+2-x)\sqrt{2-x} = (1+2y-1)\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1})$, trong đó $f(t) = (1+t)\sqrt{t}(t \ge 0)$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{t} + \frac{1+t}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \ge 0 \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Rightarrow x = 3-2y \le 1 < 2(y \ge 1)$.

Thay $x = 3-2y$ vào (2) ta được : $3\sqrt{y-1} - 2m\sqrt{y+1} = 2\sqrt[4]{y^2-1}(1)$. Do vậy ta chỉ cần tìm m để phương trình (1) có nghiệm $y \ge 1$.

Chia cả hai vế của (1) cho $\sqrt[4]{y+1}$ ta được:

$3\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} - 2m = 2\sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}}(i)$, đặt $t = \sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}} \Rightarrow 0 \le t < 1$.

Khi đó phương trình (i) trở thành: $m = \frac{3}{2}t^2 - t$.

Xét hàm số $f(t) = t - 3t^2$ liên tục trên đoạn $[0;1)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $f'(t)=3t-1 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Lại có: $f(0)=0; f(\frac{1}{3})=\frac{-1}{6}; f(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{6} \le f(t) < \frac{1}{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\frac{-1}{6} \le m < \frac{1}{2}$.

Bài 12. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases} (*)$$

<u>Lời giải:</u>

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x^2-x)(2x-y)=m \\ x^2-x+2x-y=1-2m \end{cases}$

Ta đặt $\begin{cases} u=x^2-x \ge \frac{-1}{4} \\ v=2x-y \end{cases}$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} uv=m \\ u+v=1-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+(2m-1)u+m=0 (1) \\ v=1-2m-u \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $u \ge \frac{-1}{4}$

Với $u \ge \frac{-1}{4}$, Từ(1) $\Rightarrow m(2u+1)=-u^2+u \Leftrightarrow m=\frac{-u^2+u}{2u+1}$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{-u^2+u}{2u+1}$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(u)=-\frac{2u^2+2u-1}{(2u+1)^2} \Rightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Lại có: $f(\frac{-1}{4})=\frac{-5}{8}; f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})=\frac{2-\sqrt{3}}{2}; \lim_{u\to+\infty} f(u)=-\infty$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ ta suy ra để hệ có nghiệm thì $m \le \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 13. Xác định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} m(x^2+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)=xy \\ m(\sqrt[3]{x^8}+x^2+\sqrt[3]{x^2}+1)+(m-1)\sqrt[3]{x^4}=2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} (*)$$

<u>Lời giải:</u>

+Nếu $m=0 \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ -\sqrt[3]{x^4}=2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$

+Nếu $m\ne 0$; Đặt $t=\sqrt[3]{x}$, khi đó $t=0$ không là nghiệm của hpt;và hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} m(t^6+t^4+t^2+1)=yt^3 \\ m(t^8+t^6+t^2+1)+(m-1)t^4=2yt^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(t^6+t^4+t^2+1)=yt^3 (1) \\ m(t^8+t^6+t^4+t^2+1)=(2y+1)t^4 (2) \end{cases}$$

+Do $t=0$ không là nghiệm của hpt, nên chia 2 vế của (1) cho t^3 và của (2) cho t^4, ta được:

$$\begin{cases} m(t^3+\frac{1}{t^3}+t+\frac{1}{t})=y \\ m(t^4+\frac{1}{t^4}+t^2+\frac{1}{t^2}+1)=2y+1 \end{cases}$$

$+t^3+\frac{1}{t^3}=(t+\frac{1}{t})^3-3(t+\frac{1}{t}); t^4+\frac{1}{t^4}=(t^2+\frac{1}{t^2})^2-2; t^2+\frac{1}{t^2}=(t+\frac{1}{t})^2-2$

Đặt $u=t+\frac{1}{t}(|u|\ge 2)$, Khi đó HPT trở thành:

$$\begin{cases} m(u^3-3u+u)=y \\ m[(u^2-2)^2-2+u^2-2+1]=2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3-2u)=y \\ m(u^4-3u^2+1)=2y+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3-2u)=y \\ m(u^4-3u^2+1)=2m(u^3-2u)+1 (3) \end{cases}$$

+ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm $|u|\ge 2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$(3) \Leftrightarrow m(u^4 - 3u^2 + 1 - 2u^3 + 4u) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$

$+ f'(u) = 4u^3 - 6u^2 - 6u + 4;\ f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2(|u| \geq 2)$

Lập bảng biến thiên của $f(u)$ ta suy ra (3) có nghiệm thỏa mãn $(|u| \geq 2)$ khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \leq \frac{-1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$m(\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3 (*)$$

Lời giải:

Điều kiện: $1 \leq x \leq 4$.

Khi đó phương trình tương đương với: $m = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3}{\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3}{\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Trong đó: $\begin{cases} u(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3 > 0 \\ v(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x > 0 \end{cases}, (1 \leq x \leq 4)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

Mặt khác, ta có: $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0;$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$v'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} \le 0 (\sqrt{5-x} \le 2)$

Từ đó suy ra : $\Rightarrow f'(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[1;4]} f(x) = f(1) = \frac{10}{5+2\sqrt{3}}; \max\limits_{x\in[1;4]} f(x) = f(4) = \frac{7+\sqrt{3}}{3}, x \in [1;4]$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\frac{10}{5+2\sqrt{3}} \le m \le \frac{7+\sqrt{3}}{3}$.

Bài 15. Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện $0 \le x \le 4$.

Nhân cả 2 vế của phương trình với $(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$, phương trình trở thành

$m = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$.

Xét hàm số $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = u(x).v(x)$.

Trong đó: $\begin{cases} u(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} > 0 \\ v(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{4-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0 \\ v'(x) = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}} > 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra:

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biên trên đoạn $[0;4]$.

Suy ra $\min\limits_{x\in[0;4]}(x) = f(0) = 2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}; \max\limits_{x\in[0;4]} f(x) = f(4) = 12, \forall x \in [0;4]$.

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\sqrt{15} - 4\sqrt{3} \le m \le 12$.

Bài 16. Xác định m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^3 - 3x + 1 \le m(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})^3$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1$.

Khi đó nhân cả 2 vế của bất phương trình với $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 > 0$, bất phương trình trở thành:

$(x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \leq m(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = m$

$\Leftrightarrow f(x) = (x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \leq m$.

Suy ra để bất phương trình có nghiệm là $m \geq \min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = (x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = u(x).v(x)$,

trong đó: $\begin{cases} u(x) = x^3-3x+1 > 0 \\ v(x) = (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 > 0 \end{cases}, \forall x \geq 1$.

Ta có $u'(x) = 3x^2-3 > 0; v'(x) = \frac{3}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2 > 0$.

$\Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x)+v'(x)u(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

$\min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x) = f(1) = -1, \forall x \geq 1$.

+ Để bpt có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min f(x) = -1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-1;+\infty)$.

Bài 17. Tìm m để hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012 (1) \\ x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0 (2) \end{cases}$$ có nghiệm

Lời giải:

+Điều kiện: $x \geq -1$, Khi đó ta có:

$(1) \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012$

$\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1006(2x+\sqrt{x+1}) = 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1006(2+\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow f(2x+\sqrt{x+1}) \leq f(2+\sqrt{x+1}) (*)$

Với $f(t) = 7^t + 1006t$, ta có

$f'(t) = 7^t \ln 7 + 1006 > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên R, và từ

$(*) \Rightarrow 2x + \sqrt{x+1} \le 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0$ có nghiệm $x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow m \ge g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}; x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow m \ge \min\limits_{x \in [-1;1]} g(x)$

Ta có: $g'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \in [-1;1]$

$+g(-1) = -2; g(2-\sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3}; g(1) = -2 \Rightarrow \min\limits_{x \in [-1;1]} g(x) = g(\pm 1) = -2$.

Vậy $m \ge -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Biết rằng $f(t) = 3\sqrt{2+t} - 6\sqrt{2-t} + 4\sqrt{4-t^2} - 10 + 3t, -2 \le t \le 2$, xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$m = \int_0^x f(t)dt; x \in [-2;2]$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $m = F(x) = \int_0^x f(t)dt; x \in [-2;2]$

$+F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$

$\Leftrightarrow 3(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}) + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x(*)$

Đặt $u = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \Rightarrow u^2 = 2 + x - 4\sqrt{4-x^2} + 4(2-x) = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình (*) trở thành: $3u = u^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} \\ \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x}+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$

Ta tìm GTLN và GTNN của $F(x), x \in [-2;2]$, ta có:

$$+F(-2) = \int_0^{-2} f(x)dx = \int_0^{-2} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx = 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi$$

$$+F(\frac{6}{5}) = \int_0^{\frac{6}{5}} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx$$

$$= 32\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{246}{25} + 8\arcsin\frac{3}{5} - 4\sin(2\arcsin\frac{3}{5}).$$

$$+F(2) = \int_0^{2} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx = 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi$$

$$\Rightarrow \min_{x\in[-2;2]} F(x) = F(2) = 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi ; \max_{x\in[-2;2]} F(x) = F(-2) = 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi ;$$

$$\Rightarrow 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi \le m \le 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi .$$

Bài 19. Xác định giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

$$2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \ge m(*)$$

<u>Lời giải:</u>

BPT(*) $\Leftrightarrow m \le f(x) = 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

Vậy $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} f(x)$

Ta chứng minh: $f(x) \le 0 \forall x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, thật vậy với $\forall x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ thì ta có

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$= 2(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1) + (x^2-3) + (1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}})$$

$$= 2(\frac{\frac{x^2+x+1}{x+4} - 1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + 1}) + (x^2-3) + \frac{(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+x+1)(x+4)} + x + 4} + (x^2-3) + \frac{(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}$$

$= (x^2-3)(\frac{2}{\sqrt{(x^2+x+1)(x+4)} + x + 4} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}) \le 0, \forall x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-\infty;0)$.

Bài 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình sau luôn đúng

$$m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \ge 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2 (*)$$

Lời giải:

+Điều kiện : $-1 \le x \le 1$

+ Đặt $t = |x| + \sqrt{1-x^2} > 0 \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x^2-x^4} \ge 1 \Rightarrow t \ge 1;$

$+ t = |x| + \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{2(x^2+1-x^2)} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}$

BPT(*) $\Leftrightarrow m(t+1) \ge t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m \ge f(t) = \frac{t^2+t+1}{t+1}$

BPT(*) có luôn có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge \max\limits_{t\in[1;\sqrt{2}]} f(t)$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;\sqrt{2}] \Rightarrow \max\limits_{t\in[1;\sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1.$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m \ge 2\sqrt{2} - 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số m cần tìm là: $m = 2\sqrt{2} - 1$.

Bài 21. Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} (x+\frac{3}{2})\sqrt{x^2+2x+3} + (x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+1} + 2x + 2 \geq 0 (1) \\ \log_{m^2+1}(3\sqrt[3]{x^2}+1) \leq \log_{m^2+1}(m-2x) (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

+ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} > 0 \\ v = \sqrt{x^2+2x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2+1 \\ v^2 = x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{v^2-u^2-2}{2}$

Thay vào (1), ta được:

$$(v^2-u^2+1)\frac{v}{2} + (v^2-u^2-1)\frac{u}{2} + v^2 - u^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow v-u \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Điều kiện: $m^2+1>1 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó phương trình (2) tương đương với

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < 3\sqrt[3]{x^2}+1 \leq m-2x \end{cases} \Leftrightarrow m \geq f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x + 1; x \geq -1 (m \neq 0).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x \geq -1$, điều này tương đương với $m \geq \min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x)$.

Ta có: $f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow m \geq 1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(1;+\infty)$.

Bài 22. Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 (1) \\ x^3 - 3|x|x - m^2 - 15m \geq 0 (2) \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$.

(2) $\Leftrightarrow m^2 + 15m \le f(x) = x^3 - 3|x|x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi, bất phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $[-1;4]$, khi và chỉ khi $m^2 + 15m \le \max\limits_{x\in[-1;4]} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3|x|x = \begin{cases} x^3 + 3x^2 (-1 \le x < 0) \\ x^3 - 3x^2 (0 \le x \le 4) \end{cases}$.

Ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x(-1 \le x < 0) \\ 3x^2 - 6x(0 \le x \le 4) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$.

Ta có $f(-1) = 2; f(0) = 0; f(-2) = 4; f(2) = -4; f(4) = 16$.

Từ đó suy ra: $\max\limits_{x\in[-1;4]} f(x) = f(4) = 16$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 15m \le 16 \Leftrightarrow -16 \le m \le 1$.

Vậy $m \in [-16,1]$ là giá trị cần tìm.

Bài 23. Tìm m để phương trình $mx^2 + 1 = \cos x$ có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải:

+ Phương trình đã cho tương đương với

$$m = \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \Leftrightarrow -2m = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2; t = \frac{x}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2; t = \frac{x}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

+ Ta có $f'(t) = 2\left(\frac{\sin t}{t}\right)\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = 2\left(\frac{\sin t}{t}\right)\frac{\cos t(t - \tan t)}{t^2} > 0$, vì với $t \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì $\sin t \cos t > 0, \tan t < t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Như vậy $f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ suy ra để phương trình có nghiệm thì

$f(0) < -2m < f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < \frac{-4}{\pi^2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 24. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \ (1) \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$$ có nghiệm

Lời giải:

Từ hai phương trình trong hệ ta suy ra

$m = \frac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2} (*)$

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ và hệ có nghiệm $(x;0), x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $y \neq 0$ chia cả tử và mẫu của (*) cho y và đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó ta được

$m = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1} (**)$. Từ (1) ta có: $2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} > 0 \Rightarrow \left(t > \frac{1}{2}\right) \vee (t < -1)$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm $t \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ trên khoảng $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = -\frac{t^2 + 6t + 2}{(2t^2 + t - 1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 - \sqrt{7} \\ t = -3 + \sqrt{7} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra giá trị của m là $m \geq \frac{14 + 5\sqrt{7}}{28 + 11\sqrt{7}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 25. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0(1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0(2) \end{cases}$$ có nghiệm thực.

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t \in [0;2]$, khi đó phương trình (1) trở thành

$t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 (*)$, xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ trên đoạn $[0;2]$, ta có $f'(u) = 3u^2 - 6u \le 0, \forall u \in [0;2]$, suy ra $f(u)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$

Do đó phương trình (*) tương đương với $f(t) = f(y) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow y = x + 1$

Khi đó $x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0(i)$

Đặt $v = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v \in [0;1] \Rightarrow (i) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Xét hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$lien tục trên đoạn $[0;1]$, ta có $g'(v) = 2v + 2 > 0, \forall v \in [0;1]$

Suy ra $\min_{v\in[0;1]} g(v) = g(0) = -1; \max_{v\in[0;1]} g(v) = g(1) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 2$.

Bài 26. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \ge 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \le \dfrac{2m-1}{2m+5} \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \le -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 \le 3 - \dfrac{18}{2m+5} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế hai phương trình trong hệ trên ta suy ra:

$$\left(4x+2y\right)^2=16x^2+16xy+4y^2\le -\frac{18}{2m+5}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì cần $2m+5<0\Leftrightarrow m<-\frac{5}{2}$.

Bây giờ ta chứng minh với $m<-\frac{5}{2}$ thì hệ có nghiệm.

Thật vậy, xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}5x^2-4xy+2y^2=3\\21x^2+12xy+6y^2=3\end{cases}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{1}{7}\\y=\mp\frac{2}{7}\end{cases}$$
, suy ra hệ này có nghiệm.

Giả sử $\left(x_0,y_0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình (*), khi đó ta có

$$\begin{cases}5x_0{}^2-4x_0y_0+2y_0{}^2=3\\21x_0{}^2+4x_0y_0+6y_0{}^2=3<3-\frac{18}{2m+5}\end{cases},m<-\frac{5}{2}$$

Suy ra $\left(x_0,y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ đã cho.

Từ đó suy ra $m<-\frac{5}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 27. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}3x^2=y^3-2y^2+my\\3y^2=x^3-2x^2+mx\end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

(i). Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $\left(x_0,y_0\right)$, khi đó $\left(y_0,x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào hệ ta được $x_0{}^3-5x_0{}^2+mx_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0{}^2-5x_0+m=0(*)\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Hệ có nghiệm duy nhất thì (*) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, điều này tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\Delta = 25-4m<0\\ \begin{cases}\Delta = 25-4m=0\\ m=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m>\frac{25}{4}.$$

(ii). Điều kiện đủ:

Với $m>\frac{25}{4}$, khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}3x^2 = y\left(y^2-2y+m\right) = y\left(\left(y-1\right)^2+m-1\right)\geq 0\\ 3y^2 = x\left(x^2-2x+m\right) = x\left(\left(x-1\right)^2+m-1\right)\geq 0\end{cases} \Rightarrow x,y\geq 0.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x\left(x^2-5x+m\right)+y\left(y^2-5y+m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right)+y\left(\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

Kết luận vậy $m>\frac{25}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 28. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\left|x+1\right|+\left(4-m\right)\left|x-1\right| = \left(m-1\right)\sqrt{x^2-1}$$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\left(x-1\right)\left(x+1\right)\geq 0$

Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình, khi đó chia hai vế của phương trình cho $\left|x-1\right|$ và có $\frac{\left|x+1\right|}{\left|x-1\right|}=\frac{x+1}{x-1}$, ta được

$$\frac{x+1}{x-1}+4-m=\left(m-1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+4}{1+t},\ \text{với } t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 + t + 4}{t + 1}$ có $f'(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2} \neq 0, t \in [0; +\infty); t \neq 1$

Từ đó suy ra $f(t) > f(1) = 3; \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m > 3$

Bài 29. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^4 + 8x} = (m-2)x^2 - 2(m+2)x + 4m$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^4 + 8x} + 2x^2 + 4x = m\left(x^2 - 2x + 4\right) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x^4 + 8x} + 2x^2 + 4x}{x^2 - 2x + 4}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4}} + 2.\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4}$$

Do đó ta đặt $t = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 4}$; khi đó $m = \sqrt{t} + 2t$

Trước hết ta tìm tập giá trị của t, ta có

$$t'(x) = \frac{-4\left(x^2 - 2x - 2\right)}{\left(x^2 - 2x + 4\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $t \in \left[1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

Vậy ta xét hàm số $f(t) = 2t + \sqrt{t}$ đồng biến trên $\left[1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

Giá trị cần tìm của tham số m thỏa mãn $m \in \left[2\left(1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}; 2\left(1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\right]$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 30. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $f'(x)=\frac{-3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-x\left[\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right]$

Do $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow 3x+4>0\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}>0$

Vậy $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	-4

Dựa vào bảng biến thiên suy ra để phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} m=1 \\ -4\le m<\frac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 31. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_3(xy+2)=2 \\ x^3+y^3-xy=m \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $a=\log_2(x+y); b=\log_3(xy+2)$ khi đó ta có $a+b=2$

Lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (2^a)^2 \geq 4(3^b-2)=4(3^{2-a}-2) \Leftrightarrow 12^a+8.3^a-36 \geq 0$

Xét hàm số $f(a)=12^a+8.3^a-36$ đồng biến; lại có $f(1)=0$ vậy $a \geq 1$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$$m=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy=(2^a)^3-3(3^{2-a}-2).2^a-(3^{2-a}-2)$$

Xét hàm số $f(a)=(2^a)^3-3(3^{2-a}-2).2^a-(3^{2-a}-2)$ trên $[1,+\infty)$

Ta có $f'(a)=8^a\ln 8+6.2^a\ln 2-27.\left(\frac{2}{3}\right)^a.\ln\frac{2}{3}-9.\left(\frac{1}{3}\right)^a.\ln\frac{1}{3}>0$ với mọi a

Suy ra $f(a) \geq f(1)=1$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \geq 1$.

Bài 32. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \leq m \\ x^2-2xy-2x \leq m-2 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \leq m \\ x^2-2xy-2x+2 \leq m \\ 2(x^2-xy+2y^2-x)+(x^2-2xy-2x+2) \leq 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \leq m \\ x^2-2xy-2x+2 \leq m \\ 2(x-2y)^2+2(x-1)^2 \leq 3m \end{cases}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì trước tiên $3m \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ngược lại với $m \geq 0$; thì hệ luôn có nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Vậy $m \geq 0$ là giá trị cầ tìm.

Bài 33. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=m \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y(x-1) \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 1 \end{cases}$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành: $y+2\sqrt{y(x-1)}+(x-1)=4$ (1)

Nếu $x<1; y<0$ thì ta có (1) tương đương với

$-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{-y}\right)^2=4$ vô nghiệm, nên hệ vô nghiệm

Vậy $1 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 1$ và (1) tương đương với

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y}\right)^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=4$, đặt $t=\sqrt{y} \in [0;1] \Rightarrow x=t^2-4t+5$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$m=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f'(t)=\frac{2-t}{\sqrt{4t-t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=0 \Leftrightarrow (2-t)\sqrt{1-t^2}=t\sqrt{4t-t^2}$

$\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \in [0;1]$

Ta có $f(0)=1; f(1)=\sqrt{3}; f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy để hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm, tương đương với m thuộc tập giá trị của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ từ đó suy ra $m\in\left[\frac{\sqrt{5}}{3},\sqrt{3}\right]$ là giá trị cần tìm.

Bài 34. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x-y|+|x^3-y^3|=m^3 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có $|x-y|+|x^3-y^3|=|x-y|\left(1+x^2+xy+y^2\right)=|x-y|\left(2+xy\right)$

Suy ra $m^6=\left(x-y\right)^2\left(2+xy\right)^2=\left(1-2xy\right)\left(2+xy\right)\left(2+xy\right)$ nhưng do $xy\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}$ nên theo bất đẳng thức cô sic ho 3 số không âm ta được:

$$m^6=\left(1-2xy\right)\left(2+xy\right)\left(2+xy\right)\le\left(\frac{1-2xy+2+xy+2+xy}{3}\right)^3=\left(\frac{5}{3}\right)^3\Rightarrow m\le\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Ngược lại, với $m=\sqrt{\frac{5}{3}}$ thì dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi đó $xy=-\frac{1}{3};x^2+y^2=1$. rõ rang hệ này có nghiệm.

Vậy giá trị cần tìm của m là $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$$

1.2. Tìm tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$$

1.3. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4})-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$$

1.5. Tìm m để phương trình sau

$$1+\frac{2m}{3}\sqrt{x-x^2}-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0$$ có nghiệm thực

1.6. Cho phương trình

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-(2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=m$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

1.7. Cho phương trình

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{2-x}=m(3x+5).$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

1.8. Xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$2\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=m$$

1.9. Định m để phương trình sau có nghiệm

$$x^3+x^2+x=m(1+x^2)^2$$

1.10. Xác định giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2+(x^2+x+1)^2=(x^2+1)^2+m(x^2-x+1)^2$$

1.11. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm thực:

$$x-\sqrt{x}=m(1-\sqrt{2(x^2-x+1)})$$

1.12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2)=2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+4$$

1.13. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt[3]{x+24m}+\sqrt{12m-x}-6=0$$

1.14. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$$

1.15. Xác định giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{x^3+mx^2+x+m}+\sqrt{-x^3+mx^2-x+m}=m\sqrt{x^2+1}$$

1.16. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thực:

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$$

1.17. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\log_2(x^3+4mx)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-2m+1)=0$$

1.18. Cho phương trình

$$\log^2{}_3 x+\sqrt{\log^2{}_3 x+1}-2m-1=0(m \text{ là tham số})$$

Xác định m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1;3^{\sqrt{3}}]$

1.19. Xác định giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$12(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{(3x-2)^3}+6x^3-9x^2-36x=m$$

1.20. Chứng minh rằng với mọi giá trị thực dương của tham số m phương trình sau luôn có 2 nghiệm phân biệt:

$$x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$$

1.21. Tìm để bất phương trình sau có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]$:

$$m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\le 0$$

1.22. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $x^3-3x-1\ge m\left(\sqrt{x-x^2}-\sqrt{x}\right)^3$

1.23. Tìm tất cả m để bất phương trình

$$-x^3+3mx-2\le -\frac{1}{x^3} \text{ thỏa mãn với } x\ge -1$$

1.24. Tìm m để bất phương trình

$$\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2+3)>1 \text{ đúng với mọi } x\in\mathbb{R}$$

1.25. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$

$$m=\int_2^x f(t)dt \text{ ; trong đó } f(t)=3(2+\sqrt{t-2})-2t-\sqrt{t+6}(t\ge 2)$$

1.26. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm thực

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{m^3}(x-1)^2+\frac{\sqrt{m}}{(x-1)^2}\le\sqrt[4]{m^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

1.27. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{-1}{2};1\right]$

$$m\le 1+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$$

1.28. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm

$$\sqrt{m-2x(y+1)}=y-x+2$$

1.29. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}2x-y-m=0\\ x+\sqrt{xy}=1\end{cases}$$

1.30. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m\end{cases}$$

1.31. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ \sqrt[8]{5-2y}+\sqrt[4]{5-2y}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\end{cases}$$

1.32. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm thực x, y dương:

$$\begin{cases}x^2+y+x^3y+xy^2+xy=\frac{-5}{4}+m\\ x^4+y^2+xy(1+2x)=\frac{-5}{4}+m\end{cases}$$

1.33. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0\end{cases}$$

1.34. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1\\ \sqrt{x+y}=m(x^2-y)\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.35. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(x+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

1.36. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x = 2011 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2011 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0$

1.37. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1)\sqrt{x^2+1}$$

1.38. Cho bất phương trình

$$\frac{x}{1+|x|} \ge mx^2 + x (1)$$

(i). Giải bất phương trình (1) khi $m = 2$.

(ii). Tìm giá trị m lớn nhất sao cho bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.39. Chứng minh rằng với mọi tham số m phương trình

$$x^3 - 9x - m\left(x^2 - 1\right) = 0$$

luôn có 3 nghiệm.

1.40. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+mx+2}}{2x-1}\right) = 2x - \sqrt{x^2+mx+2} - 1.$$

1.41. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$2012^{x^2+2mx+2} - 2012^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m.$$

1.42. Tìm m để tồn tại cặp số (x, y) không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn phương trình:

$$(4m-3)|x| + (3m-4)|y| + (m-1)\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

1.43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đê hệ phương trình sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+m}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}+m}=4 \\ \frac{2}{x+y}+\frac{1}{xy}=1 \end{cases}$$

1.44. Tìm tất các các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_3(xy+2)=2 \\ x^3+y^3-xy=m \end{cases}$$

1.45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+m}+\sqrt{x-y+m}=2 \\ x^2+y^2=m^2 \end{cases}$$

1.46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{\frac{14x^2}{3}+\frac{1}{96x^2}+m}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=2x$$

1.47. Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ \sqrt{2x+y}+3\sqrt[6]{x(y+1)^2}=m\left(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}\right) \end{cases}$$

1.48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^2+(m+2)x+4\le(m-1)\sqrt{x^3+4x}\ (x\in\mathbb{R})$$

1.49. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$x^2+7+m\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4+x^2+1}+m\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\right)$$

1.50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để mọi nghiệm của phương trình $\frac{\log_2(9-x^3)}{\log_2(3-x)}=3$ cũng là nghiệm của phương trình: $\sqrt{\left(\sqrt{2}+x\right)^m}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-x\right)^m}=2\sqrt{2}$

1.51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right)+m+4=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

có đúng hai nghiệm thực thỏa mãn điều kiện $1 \le |x| \le 3$.

1.52. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$(x-1)^2 + 4\sqrt{x^2-2x} - 2\left(2\sqrt{x^2-2x}+1\right)\ln\left(\sqrt{x^2-2x}\right) = m$$

1.53. Tìm những giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$$

1.54. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$(m-3)\sqrt{x} + (2-m)x + 3 - m = 0$$

1.55. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt[5]{x^2-34x+m} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$$

1.56. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$m\sqrt{x^2-2x+17} - (2m+1)\sqrt[4]{x^2-2x+17} + m + 1 > 0$$

1.57. Tìm tất cả các giá trị không âm của tham số m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x-m} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x}$

1.58. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[4]{x(x-1)}\right) = 1$$

1.59. Tìm m để phương trình $2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1.60. Tìm m để phương trình:

$12\sqrt{4+x-3x^2} = 3x - 24 + m\left(3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-3x}\right)$ có nghiệm

1.61. Tìm m để hệ phương trình

$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+15} = \dfrac{x+y}{2} \\ x + y = m \end{cases}$ có nghiệm

1.62. Tìm m để hệ sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+4)=-3(x^2-2y^2)+9y-8\\ \sqrt{11+2(2x-y)-y^2}=2m+\sqrt{5+2y-x^2}\end{cases}$$

1.63. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^3+(y+2)x^2+2xy=-2m-3\\ x^2+3x+y=m\end{cases}$$

1.64. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m$$

1.65. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases}\log_2(x+y)+\log_3(xy+2)=2\\ x^3+y^3-xy=m\end{cases}$

1.66. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực $4x^2-2mx+1=3\sqrt{8x^3+2x}$

1.67. Tìm m để bất phương trình $x^6-3mx^4+2x^3-1\geq 0$ với mọi $x\geq 1$

1.68. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}\sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}}\\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}}\end{cases}$$

1.69. Tìm m để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}=1\\ m^2\sqrt{4-x}>5m\sqrt{4-x}+6\sqrt{4-y}\end{cases}$$

1.70. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^4+y^4=1\\ \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x+y}+x^2y^2+\dfrac{1}{x+y}=m\end{cases}$$

1.71. Tìm m để hệ sau có ba nghiệm phân biệt $\begin{cases}x+y=m\\ (x+1)y^2+xy=m(y+2)\end{cases}$

1.72. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}=2\\ x^2+y^2=2m^2\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.73. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \left|6x+4y+6\sqrt{x+3y}+9\right| = 2\left(\sqrt{5x^2+16xy+3y^2}+3\sqrt{5x+y}\right) \\ 12\sqrt{x+3y}+\frac{7}{3}(x-2y)-\frac{31}{4} \geq 8\left[2(m+5)-\sqrt{\left|1-9m^2\right|}\right] \end{cases}$$

1.74. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x+1+\frac{5}{6x}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}=m$

1.75. Tìm m để bất phương trình sau dung với mọi $x \in [0;1]$

$$\frac{\left(x-6^{1-x}\right)\left((m-1)6^x-\frac{2}{6^x}+2m+1\right)}{ex^2-\pi x+2012} \geq 0$$

1.76. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x+y+4=2xy \\ 2^{x+y}=m\left(\sqrt{x^2+y^2+x+y+5}+x+y\right) \end{cases}$ có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x, y \geq 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam